Regla de Cálculo Logarítmico-Cuadrática

Por el topógrafo oficial y agente ferroviario Seifert, en Saarbrücken.

La regla de cálculo se ha convertido en una herramienta indispensable en la mayoría de campos técnicos. Pero se ha desestimado en topografía por dos motivos principalmente. Primero porque las reglas de cálculo comunes proporcionan resultados imprecisos, es decir, las multiplicaciones de números con tres y cuatro dígitos, como las que se requieren en el cálculo de superficies o vértices de un polígono, no alcanzan la precisión necesaria.

En segundo lugar porque carecen de una escala adecuada para el cálculo directo de proporciones pitagóricas. La importancia de esta última afirmación se hace patente por la existencia de numerosas invenciones, de las cuales yo conozco tres reglas de cálculo especiales, aunque todavía ninguna con éxito, pues, entre otras cosas, es engorroso como se obtienen los resultados.

Estos dos inconvenientes presentados los resuelve la regla de cálculo que nos ocupa, en primer lugar porque sus escalas son cinco veces más largas que las de las reglas de cálculo comunes, con el incremento de precisión respectivo. Y en segundo lugar porque incluye una escala especial donde se puede obtener el lado de un triángulo rectángulo a partir de los otros dos, en un único movimiento y con la suficiente precisión, pues las fuentes de error se minimizan al máximo.

Con una longitud de 35 cm, cabe fácilmente en el maletín y no es más voluminosa que la regla común. Tiene tres escalas distintas:

1 logarítmica para multiplicaciones y similares,
1 cuadrática, para el cálculo de relaciones pitagóricas,
1 escalas de seno y coseno en la parte posterior de la reglilla, particularmente adecuadas para el cálculo de trazados poligonales.

Todas las escalas tienen una longitud de 625 mm y están divididas por la mitad. A diferencia de la regla de cálculo con escalas divididas por la mitad diseñada por el Dr. Frank (1903, Diario de Topografía, p. 401 - 405), las mitades de las tres escalas divididas se han dispuesto adyacentes, con la ventaja de que el resultado se encuentra siempre en una única línea de base.

Seifert. Regla de Cálculo Logarítmico-Cuadrática

Diario de Topografía 1924

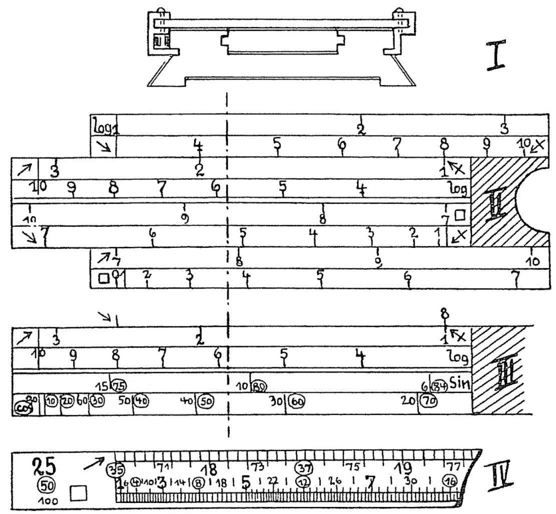
Otra innovación es la aplicación del principio de Frank de las escalas cuadráticas pero incluyendo triple numeración (fig. IV) para conseguir la precisión requerida en la práctica.

La numeración es tal que los números grandes son para las hipotenusas entre 10 y 25 m, o 100 y 250 m, los números circunscritos sirven de 25 a 50 m, o de 250 a 500 m, y los números pequeños de 50 a 100 m, o de 500 a 1000 m, o de 0 a 10 m. De este modo, cada intervalo de la serie hasta 25 es cuatro veces mayor que en la serie hasta 50 y dieciséis veces que en la serie hasta 100.

La escala de seno y coseno tiene también doble numeración al igual que en el resto de la regla, de modo que se encuentre el resultado directamente, sin cálculo intermedio. Las escalas de la reglilla están invertidas, principalmente para evitar errores de alineación en las operaciones más comunes de multiplicación, de encontrar la hipotenusa, y para crear una tabla de recíprocos.

Los valores que faltan del seno de 0° a 6°, o del coseno de 84º a 90º, están en el reverso de la regla, donde también se dispone de mucho espacio para otras tablas y fórmulas, dispuestas en una pequeña hoja.

Además, cuatro escalas estándar para mapas se incluyen en los dos laterales achaflanados: 1:500, 1:1000, 1:625 y 1:1250. El cristal del cursor no tiene marco para una mejor visibilidad, al igual que el "Visión Libre" de Dennert.



La figura I es una sección vertical,
La figura II es un esquema del frontal de la regla,
La figura III es un esquema del reverso de la reglilla,
La figura IV es una vista parcial de las escalas cuadráticas reales.
La línea punteada indica la línea del cursor para los ejemplos siguientes, usando las figuras II y III:

A es donde el cursor se sitúa en las escalas del cuerpo,
B es el número en la reglilla a desplazar bajo la línea del cursor.

A. B.

$\underline{43{,}04} \cdot 18{,}56 = 798{,}8 \; \nwarrow$

$\sqrt{\underline{36{,}59}^2 + \underline{51{,}82}^2} = \; \nearrow \; 63{,}44$

$\overline{136{,}1} \cdot \overline{\sin 10^\circ 42'} = \; \searrow \; 25{,}26$

$\overline{13{,}61} \cdot \underline{\cos 54^\circ 4'} = 7{,}988 \; \nwarrow$

De los ejemplos basados en los esquemas gráficos, se puede deducir la siguiente regla de cálculo, idéntica en las tres escalas:

Leer el producto o la hipotenusa junto a $\longrightarrow$ (izquierda), si la disposición inicial es en ambas escalas sobre o bajo las líneas de base, y junto a $+\!\!\!\longrightarrow$ (derecha), si la disposición inicial es en una sobre y en otra bajo las líneas de base (¡signo + en la flecha!). Sobre o bajo la línea de base hacen referencia a que el número respectivo está en la mitad de la escala situada sobre o bajo la línea de base. ¡Otra regla común!.

La precisión de la escala logarítmica se deduce de que se lee un 4º dígito directamente cada cinco unidades entre 1 y 2, cada 10 unidades entre 2 y 5 y cada 20 unidades entre 5 y 10. El error estimado es ± 1, ± 2 y ± 3 del 4º dígito.

La precisión en las escalas cuadráticas es tal que una hipotenusa de 0 a 10 m se lee directamente hasta 2 cm (sin estimación), hasta 5 cm de 10 a 25 m, hasta 10 cm de 25 a 50 m y hasta 20 cm de 50 a 100 m. El error estimado es como antes y es despreciable en comparación con la imprecisión de la medida.

Seifert. Regla de Cálculo Logarítmico-Cuadrática

Diario de Topografía 1924

En las escalas trigonométricas se puede leer el ángulo del seno directamente hasta 2' entre 5° 30' y 15°, hasta 5' entre 15° y 30°, hasta 10' entre 30° y 50°, hasta 20' entre 50° y 70°, hasta 30' entre 70° y 80°, hasta 1º entre 80° y 85°, y hasta 5º entre 85° y 90°. La tangente y cotangente se pueden encontrar con la regla de cálculo a partir de $\frac{sen}{cos}$ o $\frac{cos}{sen}$.

Para determinar la precisión que se puede obtener con la regla de cálculo indicada, se asume un error de la estimación lineal media de 0,05 mm cuando se dispone o se lee. Este valor se puede conseguir fácilmente con una fabricación precisa del instrumento y con algo de cuidado en su uso. Se considera que este error lineal es igual en toda la regla. Esto da un error total promedio para el resultado de un cálculo con dos argumentos en la escala logarítmica, expresado en ‰, de $\frac{0{,}05 \cdot 1000\sqrt{3}}{625 \cdot \text{Mod.}} = 0{,}32‰$.

Lectura a m^2	m a m^2	µ a m^2
500	0,16	4,0
1.000	0,32	5,8
2.000	0,64	8,2
4.000	1,28	11,6
6.000	1,92	14,3
8.000	2,56	16,5
10.000	3,20	18,6

De la tabla adjunta se puede ver que la precisión es suficiente para los cálculos de superficies. En la columna 2 están los errores medios de los resultados de la regla, y en la 3 los errores medios del cálculo de superficies, derivados de la fórmula $\mu a = \frac{d}{3\sqrt{2}}$ del error máximo de los requisitos catastrales. No se contemplan errores mayores pues para factores por encima de los 100 m, el producto se puede descomponer fácilmente.

Para el cálculo de trazados poligonales, la precisión es suficiente normalmente, especialmente por la distribución proporcional de los errores de cálculo, que elimina el error final y los errores de medida.

En las escalas cuadráticas el error disminuye al crecer en las lecturas, pues se ensanchan los intervalos en éstas, al contrario de las escalas logarítmicas. Derivando la ecuación $x = \frac{a^2 \cdot 625}{z^2}$, donde a corresponde a la longitud de la lectura y z al número final de la escala respectiva (25, 50 o 100), se obtiene, para un cálculo con dos argumentos: $m_a = \frac{z^2\sqrt{3}}{2a \cdot 625} \cdot m_x$.

Con la suposición previa de que m_x = 0,05 mm se puede entonces calcular la tabla a continuación. Se puede ver que los errores relativos listados en la columna 4 sólo para un valor (para 10) son peores que los de las escalas logarítmicas. Como comparación se añade la columna 5 con los errores promedio en una medida de longitud en un terreno I, a partir de los errores máximos de los requisitos catastrales dados por la fórmula $\mu_a = \frac{d}{4\sqrt{2}}$.

Escala z	Lectura a m	$m\ a$ cm	$m\ a$ ‰	$\mu\ a$ cm
25	10	0,43	0,43	1,2
	15	0,29	0,19	1,4
	20	0,22	0,11	1,6
	25	0,17	0,07	1,8
50	25	0,69	0,28	1,8
	30	0,58	0,19	2,0
	40	0,43	0,11	2,3
	50	0,35	0,07	2,6
100	50	1,4	0,28	2,6
	60	1,10	0,19	2,8
	80	0,87	0,11	3,1
	100	0,70	0,07	3,7

Aquí vemos de nuevo, como en la escala logarítmica, que los errores de cálculo medios son sólo una pequeña fracción de los errores medios de medida, incluso en los peores casos.

El hecho de que los errores medios sean menores cuanto mayor sea la lectura, debido a la estructura específica de las escalas cuadráticas, también se basa en tener más divisiones intermedias hacia el final de las escalas. Aunque esto signifique que el error disminuirá más lentamente que lo indicado en la tabla, se incrementa la coherencia y claridad de las escalas.

Como en las reglas de cálculo comunes, las expresiones del tipo $\frac{a \cdot b}{c}$ se pueden calcular con las escalas logarítmicas de esta regla sin la necesidad de la lectura del valor intermedio, y de modo análogo con las cuadráticas $a^2 + b^2 - c^2$, donde el valor intermedio $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ se eleva al cuadrado con las escalas logarítmicas.

Cuando en un triángulo se calcula la altura y su punto de intersección con la base a partir de la fórmula $p = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ se usan así tanto las escalas logarítmicas y las cuadráticas, con sólo tres lecturas para los tres parámetros buscados, lo que nos vuelve a dar una prueba de precisión.

La ventaja del uso combinado de las escalas es de especial interés para el cálculo de puntos menores, transformaciones de coordenadas, trazados poligonales, etc. Pero el mayor servicio de esta nueva regla de cálculo reside en la reducción significativa del trabajo de campo gracias al control rápido y fiable de los triángulos rectángulos.

De todo lo dicho se comprende que esta regla de cálculo es especialmente adecuada para el trabajo topográfico, pues los cálculos tediosos y mecánicos se hacen rápida y fiablemente, y lo que es más importante, con una precisión razonable. Ni que decir tiene que las ventajas antes mencionadas son significativas para cualquiera de los cálculos en la práctica relacionados con relaciones Pitagóricas y funciones trigonométricas.